Sujet

Problème 2 : Garder le cap

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. Dans ce problème, on considère un entier $n \geqslant 2$ fixé et on étudie une suite de points $(M_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $M_0 = O$ et que, pour tout entier $k \geqslant 0$, le vecteur $\overrightarrow{M_k M_{k+1}}$ soit égal à $\vec{\imath}$ ou à $\vec{\jmath}$. Le but du problème est de démontrer qu'une telle suite de points contient toujours au moins n points alignés.

Notation : Dans toute la suite de l'exercice, une fraction $\dfrac{p}{q}$ peut aussi être désignée par p/q.

Partie 1 : Étude des petites valeurs de n

1) Démontrer que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient toujours deux points alignés.
2) Démontrer que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient toujours trois points alignés.

Partie 2 : Préliminaires

3) Démontrer qu'il existe une suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ telle que, pour tout entier $k \geqslant 0$,
   - ▷ le vecteur $\overrightarrow{M_0 M_k}$ soit égal à $u_k\vec{\imath} + (k-u_k)\vec{\jmath}$;
   - ▷ le terme u_{k+1} soit égal à u_k ou bien à $1+u_k$.
4) Démontrer que, si l'on dispose de deux nombres réels s et t pour lesquels il existe n entiers k tels que $u_k = sk + t$, la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient bien n points alignés.

Dans la suite, pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose $v_k = u_k/k$.

5) Démontrer, pour tout entier $k \geqslant 1$, que v_k est un nombre compris entre 0 et 1.

Enfin, au cours de ce problème, il sera fréquemment utile d'invoquer le résultat connu sous le nom de *principe des tiroirs* et qui est l'objet de la question suivante.

6) Soit k et ℓ deux entiers naturels non nuls. On veut répartir $k\ell$ chemises parmi k tiroirs. Démontrer qu'au moins un de ces k tiroirs contiendra au moins ℓ chemises.

Partie 3 : Barrières rationnelles

Dans cette partie, on considère une fraction irréductible a/b comprise entre 0 et 1. Par conséquent, a et b sont deux entiers naturels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $1 \leqslant b$.

7) Soit $k \geqslant 1$ un éventuel entier tel que $v_k \leqslant a/b \leqslant v_{k+1}$ ou $v_{k+1} \leqslant a/b \leqslant v_k$. Démontrer que
$$a - b \leqslant bu_k - ak \leqslant a.$$
8) En déduire que, s'il existe au moins $(b+1)n$ entiers k tels que $v_k \leqslant a/b \leqslant v_{k+1}$ ou $v_{k+1} \leqslant a/b \leqslant v_k$, la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient bien n points alignés.

Partie 4 : Couples serrés, moyennes naïves et recouvrements par des intervalles principaux

Soit a/b et c/d deux fractions irréductibles, dont les dénominateurs b et d sont strictement positifs. On dit que le couple $(a/b\,;c/d)$ est *serré* si l'égalité $bc - ad = 1$ est vérifiée. En outre, on appelle *moyenne naïve* des deux fractions a/b et c/d la fraction $(a+c)/(b+d)$. Enfin, on appelle *intervalles principaux* de la fraction a/b les deux intervalles $\left[\dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{2bn}\,;\dfrac{a}{b}\right]$ et $\left[\dfrac{a}{b}\,;\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{2bn}\right]$. Plus précisément, on dit que $\left[\dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{2bn}\,;\dfrac{a}{b}\right]$ est l'intervalle principal *inférieur* de a/b et que $\left[\dfrac{a}{b}\,;\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{2bn}\right]$ est l'intervalle principal *supérieur* de a/b. De manière générale, on dira qu'un intervalle est un *intervalle principal* s'il existe une fraction irréductible dont il est un intervalle principal.

9) Démontrer que le couple de fractions $(0/1\,;1/1)$ est serré.

10) Soit $(a/b;c/d)$ un couple de fractions serré.

   a) Démontrer que $a/b < c/d$.

   b) Soit x/y la moyenne naïve des deux fractions a/b et c/d. Démontrer que x/y est une fraction irréductible, et que les couples $(a/b;x/y)$ et $(x/y;c/d)$ sont tous deux serrés.

11) Soit a/b, c/d et e/f trois fractions irréductibles telles que les couples $(a/b;c/d)$ et $(c/d;e/f)$ soient serrés. Démontrer que, si $d \geqslant 2n$, la fraction c/d appartient à l'intervalle principal supérieur de la fraction a/b et à l'intervalle principal inférieur de la fraction e/f.

On considère maintenant le processus suivant.

On part d'une liste dont les deux éléments sont les fractions irréductibles 0/1 et 1/1. Puis, tant que cette liste contient deux fractions consécutives a/b et c/d telles que $b+d < 2n$, on insère dans la liste, entre ces deux fractions, leur moyenne naïve $(a+c)/(b+d)$.

12) Démontrer que le processus ci-dessus finit nécessairement par s'arrêter, et qu'alors la liste obtenue contient au plus $4n^2$ fractions, dont tout couple de fractions consécutives est un couple serré.

Soit $0/1 = q_1 < q_2 < \ldots < q_\ell = 1/1$ les ℓ fractions obtenues à l'issue du processus ci-dessus. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant \ell - 1$, on note r_k la moyenne naïve des fractions q_k et q_{k+1}.

13) Démontrer que les dénominateurs des fractions r_k appartiennent tous à l'intervalle $[2n;4n-1]$.

14) Démontrer que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant \ell - 1$, chacun des intervalles $[q_k;r_k]$ et $[r_k;q_{k+1}]$ est inclus dans un intervalle principal.

Partie 5 : Coincé dans un intervalle principal

Soit a/b une fraction irréductible. On suppose qu'il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que chacun des termes $v_{\ell n}, v_{\ell n+1}, \ldots, v_{2\ell n-1}$ appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{a}{b};\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2bn}\right]$.

15) Démontrer que $0 \leqslant bu_k - ak < \ell$ pour tout entier k tel que $\ell n \leqslant k \leqslant 2\ell n - 1$.

16) En déduire que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient bien n points alignés.

On suppose maintenant qu'il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que chacun des termes $v_{\ell n}, v_{\ell n+1}, \ldots, v_{2\ell n-1}$ appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{2bn};\dfrac{a}{b}\right]$.

17) Démontrer, sous ces nouvelles hypothèses, que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient bien n points alignés.

Partie 6 : Conclusion

18) a) Démontrer que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient nécessairement n points alignés.

   b) Démontrer que n des $n \times 2^{32n^4}$ premiers points de la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ sont alignés.

   Toute réponse aboutissant à une valeur finie différente de $n \times 2^{32n^4}$ sera prise en considération et valorisée selon la valeur proposée.

Partie 7 : Vers l'infini, et au-delà !

19) La suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient-elle nécessairement une infinité de points alignés ?